

Darstellung von Beweisen im "Einstieg in die formale Logik".

In der ersten Spalte werden die Annahmen erstens durchgängig numeriert und zweitens wird jeweils angegeben, auf welchen Annahmen das dahinterstehende Schema ruht. Die erste Spalte kann als eine Art Buchhaltung betrachtet werden. In der dritten Spalte werden die verwendeten Regeln angegeben. Die 4. Spalte ist überflüssig. Mit ihr werden die Zeilen numeriert und jeweils angegeben, welchen Zeilen verwendet wurden. Sie dient damit nur dem leichteren Nachvollzug der Beispiele.

Beispiel 40: $p \vee q \dashv\vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$

1	$p \vee q$	A	(1)
2	$\neg p \wedge \neg q$	A	(2)
3	p	A	(3)
2	$\neg p$	$\wedge E$	(4) 2
2,3	$p \wedge \neg p$	$\wedge I$	(5) 3,4
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	RAA	(6) 2,5
4	q	A	(7)
2	$\neg q$	$\wedge E$	(8) 2
2,4	$q \wedge \neg q$	$\wedge I$	(9) 7,8
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	RAA	(10) 2,9
1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vee E$	(11) 1,3,6,7,10 ■

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	A	(1)
2	$\neg(p \vee q)$	A	(2)
3	p	A	(3)
3	$p \vee q$	$\vee I$	(4) 3
2,3	$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	$\wedge I$	(5) 2,4
2	$\neg p$	RAA	(6) 3,5
4	q	A	(7)
4	$p \vee q$	$\vee I$	(8) 7
2,4	$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	$\wedge I$	(9) 2,8
2	$\neg q$	RAA	(10) 7,9
2	$\neg p \wedge \neg q$	$\wedge I$	(11) 6,10
1,2	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\wedge I$	(12) 1,11
1	$\neg\neg(p \vee q)$	RAA	(13) 2,12
1	$p \vee q$	DN	(14) 13

Beispiel 47: $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

1	$p \wedge q$	A	(1)
2	$p \rightarrow \neg q$	A	(2)
1	p	$\wedge E$	(3) 1
1	q	$\wedge E$	(4) 1
1,2	$\neg q$	MPP	(5) 2,3
1,2	$q \wedge \neg q$	$\wedge I$	(6) 4,5
1	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	RAA	(7) 2,6
	$(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	KR	(8) 1,7

Beispiel 49: $\vdash p \vee \neg p$ (Gesetz des ausgeschlossenen Dritten)

1	$\neg(p \vee \neg p)$	A	(1)
2	p	A	(2)
2	$p \vee \neg p$	$\vee I$	(3) 2
1,2	$(p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p)$	$\wedge I$	(4) 1,3
1	$\neg p$	RAA	(5) 2,4
1	$p \vee \neg p$	$\vee I$	(6) 5
1	$(p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p)$	$\wedge I$	(7) 1,6
	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	RAA	(8) 1,7
	$p \vee \neg p$	DN	(9) 8

In den *Lösungen zu den Übungen* werden Beweise aus Platzgründen dichter dargestellt als in den Beispielen im Text. Zuerst steht das zu beweisende Schema. Die in runden Klammern angegebenen Zahlen entsprechen der Zeilennummerierung. Hinter diesen Zahlen stehen die Annahmen, das Schema, das auf den angegebenen Annahmen ruht, die verwendete Regel und die verwendeten Zeilen, in dieser Reihenfolge.

- (a) $p \wedge (q \wedge r) \vdash q \wedge (p \wedge r)$: (1) 1, $p \wedge (q \wedge r)$, A; (2) 1, p , $\wedge E$, 1; (3) 1, $q \wedge r$, $\wedge E$, 1; (4) 1, q , $\wedge E$, 3; (5) 1, r , $\wedge E$, 3; (6) 1, $p \wedge r$, $\wedge I$, 2,5; (7) 1, $q \wedge (p \wedge r)$, $\wedge I$, 4,6
- (b) $q \vdash p \vee q$: (1) 1, q , A; (2) 1, $p \vee q$, $\vee I$, 1
- (c) $q \rightarrow \neg q \vdash \neg q$: (1) 1, $q \rightarrow \neg q$, A; (2) 2, q , A; (3) 2, $\neg\neg q$, DN, 2; (4) 1,2, $\neg q$, MTT, 1,3; (5) 1,2, $q \wedge \neg q$, $\wedge I$, 2,4; (6) 1, $\neg q$, RAA, 2,5
- (d) $p \wedge q \vdash p \vee q$: (1) 1, $p \wedge q$, A; (2) 1, p , $\wedge E$, 1; (3) 1, $p \vee q$, $\vee I$, 2
- (e) $p \vdash q \rightarrow (p \wedge q)$: (1) 1, p , A; (2) 2, q , A; (3) 1,2, $p \wedge q$, $\wedge I$, 1,2; (4) 1, $q \rightarrow (p \wedge q)$, KR, 2,3
- (f) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \vee q) \rightarrow r$: (1) 1, $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$, A; (2) 2, $p \vee q$, A; (3) 1, $p \rightarrow r$, $\wedge E$, 1; (4) 1, $q \rightarrow r$, $\wedge E$, 1; (5) 3, p , A; (6) 1,3, r , MPP, 3,5; (7) 4, q , A; (8) 1,4, r , MPP, 4,7; (9) 1,2, r , $\vee E$, 2,5,6,7,8; (10) 1, $(p \vee q) \rightarrow r$, KR, 2,9