Reduktion des Systems von Copi (Introduction to Logic)

Bei der Reduktion eines Systems geht es darum, in einem redundanten System manche der Regeln auf die anderen zurückzuführen. Die Wahl der ursprünglichen Regel ist dabei bis zu einem gewissen Grad willkürlich. Somit sind verschiedene Reduktionen möglich.

Das System von Copi (Introduction to Logic) ist im Grunde genommen ein axiomatisches System. Es enthält Regeln und Axiome, wenn auch manche seiner Axiome beweisbar und damit Theoreme des Systems sind (In seinem Buch *Symbolic Logic* liefert Copi ein ähnlich redundantes System. Einige wenige Regeln und Axiome hat er dort durch andere ersetzt).

Bei der folgenden Darstellung sind die Regeln wie bei Copi (Introduction to Logic) numeriert. "Äquivalentes Ersetzen" führt er nicht als eigene Regel an (sie könnte als abgeleitete bewiesen werden). Das folgende System könnte noch weiter reduziert werden.

Haben wir eine Regel als abgeleitet bewiesen, können wir sie für den Beweis anderer Regeln verwenden.

Wir setzen die folgenden Regeln als ursprünglich voraus:

(1)	Modus Ponens (MP):	Aus $p \supset q \,.\, p$ folgt q.
(7)	Simplifikation (Simp),	Aus $p \,.\, q$ folgt p
(8)	Konjunktion (Konj):	Aus p, q folgt $p \,.\, q$
(20)	Reductio ad absurdum (RAA).	Folgt aus einer Menge von Prämissen ein Widerspruch, kann eine der Prämissen verneint werden.
(21)	Konditionaler Beweis (KB).	Folgt aus p q, kann auf $p \supset q$ geschlossen werden.
(22)	Äquivalentes Ersetzen.	In einem Schema können Schemata ersetzt werden, wenn sie laut der folgenden Liste äquivalent sind.

Wir setzen die folgenden Axiome (Äquivalenzen) als ursprünglich voraus:

(10)	De Morgan	$\sim (p \,.\, q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$. $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \,.\, \sim q)$
(14)	Doppelte Negation (DN),	$p \equiv \sim\sim p$
(16)	Materiale Äquivalenz (Äquiv)	$(p \equiv q) \equiv ((p \supset q) \,.\, (q \supset p))$

Beweise

2. MT: $p \supset q, \sim q \therefore \sim p$

1	$p \supset q$	
2	$\sim q \;/\!\therefore \sim p$	
3	p	Angenommen
4	q	1, 3, MP
5	$q \,.\, \sim q$	2, 4, Konj
6	$\sim p$	3,5, RAA

3. HS: $p \supset q, q \supset r \therefore p \supset r$

1	$p \supset q$	
2	$q \supset r$ $/\therefore$ $p \supset q$	
3	p	Angenommen
4	q	1, 3, MP
5	r	2, 4, MP
6	$p \supset r$	3, 5, KB

4. DS: $p \vee q, \sim p \therefore q$

1	$p \vee q$	
2	$\sim p$ $/\therefore q$	
3	$\sim q$	Angenommen
4	$\sim p \,.\, \sim q$	2, 3, Konj.
5	$\sim(p \vee q)$	4, De Morgan
6	$(p \vee q) \,.\, \sim(p \vee q)$	1, 5, Konj.
7	$\sim\sim q$	3, 6, RAA
8	q	7, DN

5. KD: $(p \supset q) \,.\, (r \supset s), p \vee r \therefore q \vee s$

1	$(p \supset q) \,.\, (r \supset s)$	
2	$p \vee r$ $/\therefore$ $q \vee s$	
3	$p \supset q$	1, Simpl
4	$r \supset s$	2, Simpl
5	$\sim (q \vee s)$	Angenommen
6	$\sim q \,.\, \sim s$	5, De Morgan
7	$\sim q$	6, Simpl
8	$\sim s$	6, Simpl
9	$\sim p$	3, 7, MT
10	$\sim r$	4, 8, MT
11	$\sim p \,.\, \sim r$	9, 10, Konj
12	$\sim (p \vee r)$	11, De Morgan
13	$(p \vee r) \,.\, \sim (p \vee r)$	2, 13, Konj
14	$\sim \sim (q \vee s)$	5, 14, RAA
15	$q \vee s$	14, DN

6. Abs: $p \supset q \therefore p \supset (p \,.\, q)$

1	$p \supset q$ $/\therefore p \supset (p \,.\, q)$	
2	p	Angenommen
3	q	1, 2, MP
4	$p \,.\, q$	2, 3, Konj
5	$p \supset (p \,.\, q)$	2, 4, KB

9. Add: p ∴ p ∨ q

1	p /∴ p ∨ q	
2	~p . ~q	Angenommen
3	~p	2, Simp
4	p . ~p	1, 3, Konj.
5	~(~p . ~q)	2, 4, RAA
6	~ (~(p ∨ q))	5, De Morgan
7	p ∨ q	6, DN

11. Com: (p ∨ q) ≡ (q ∨ p) sowie (p . q) ≡ (q . p)

Bei einer Äquivalenz A ≡ B, müssen wir beweisen, dass B aus A folgt und B aus A folgt.

1	p ∨ q /∴ q ∨ p	
2	~ (q ∨ p)	Angenommen
3	~ q . ~ p	2, De Morgan
4	~ q	3, Simpl
5	~ p	3, Simpl
6	q	1, 5, DS
7	q . ~ q	4, 6, Konj
8	~ ~ (q ∨ p)	2, 7, RAA
9	q ∨ p	9, DN

Die Umkehrung " q ∨ p ⊃ p ∨ q" wird analog bewiesen.

1	p . q /∴ q . p	
2	p	1, Simpl
3	q	1, Simpl
4	q . p	2, 3, Konj

Die Umkehrung wird analog bewiesen.

12. Ass: (p ∨ (q ∨ r)) ≡ ((p ∨ q) ∨ r)

1	p ∨ (q ∨ r) /∴: ((p ∨ q) ∨ r)	
2	~ ((p ∨ q) ∨ r)	Angenommen
3	~ (p ∨ q) . ~ r	2, De Morgan
4	~ (p ∨ q)	3, Simpl
5	~ p . ~ q	4, De Morgan
6	~ p	5, Simpl
7	q ∨ r	1, 5, DS
8	~ q	5, Simpl
9	r	7, 8, DS
10	~ r	2,Simpl
11	r . ~ r	9, 10, Konj
12	~ ~ ((p ∨ q) ∨ r)	2, 11, RAA
13	(p ∨ q) ∨ r	12, DN

1	$((p \vee q) \vee r)$ / ∴ $p \vee (q \vee r)$	
2	$\sim (p \vee (q \vee r))$	Angenommen
3	$\sim p \,.\, \sim (q \vee r)$	2, De Morgan
4	$\sim p$	3, Simpl
5	$\sim (q \vee r)$	3, Simpl
6	$\sim q \,.\, \sim r$	5, De Morgan
7	$\sim q$	6, Simpl
8	$\sim r$	6, Simpl
9	$p \vee q$	1, 8, DS
10	q	4, 9, DS
11	$q \,.\, \sim q$	7, 10, Konj
12	$\sim \sim (p \vee (q \vee r))$	2, 11, RAA
13	$p \vee (q \vee r)$	12, DN

13. Dist: $(p \,.\, (q \vee r)) \equiv ((p \,.\, q) \vee (p \,.\, r))$

1	$p \,.\, (q \vee r)$ / ∴ $(p \,.\, q) \vee (p \,.\, r)$	
2	$\sim ((p \,.\, q) \vee (p \,.\, r))$	Angenommen
3	$\sim (p \,.\, q) \,.\, \sim (p \,.\, r)$	2, De Morgan
4	$\sim(p \,.\, q)$	3, Simp
5	p	1, Simp
6	$q \vee r$	1, Simp
7	$\sim p \vee \sim q$	4, De Morgan
8	$\sim \sim p$	5, DN
9	$\sim q$	7, 8, DS
10	r	6, 9, DS
11	$p \,.\, r$	5, 10, Konj
12	$\sim (p \,.\, r)$	3, Simp
13	$(p \,.\, r) \,.\, \sim (p \,.\, r)$	11, 12, Konj
14	$\sim \sim ((p \,.\, q) \vee (p \,.\, r))$	2, 13, RAA
15	$(p \,.\, q) \vee (p \,.\, r)$	14, DN

1	$(p \,.\, q) \vee (p \,.\, r)$ / ∴ $p \,.\, (q \vee r)$	
2	$p \,.\, q$	Angenommen
3	p	2, Simp
4	q	2, Simp
5	$q \vee r$	4, Add
6	$p \,.\, (q \vee r)$	3, 5, Konj
7	$(p \,.\, q) \supset (p \,.\, (q \vee r))$	2, 6, KB
8	$p \,.\, r$	Angenommen
9	p	8, Simp
10	r	8, Simp
11	$r \vee q$	10, Add
12	$q \vee r$	11, Comm
13	$p \,.\, (q \vee r)$	9, 13, Konj
14	$(p \,.\, r) \supset (p \,.\, (q \vee r))$	8, 13, KB
15	$p \,.\, (q \vee r)$	1, 7, 14, KD

15. Trans: $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$

1	$p \supset q$ $/\therefore$ $\sim q \supset \sim p$	
2	$\sim q$	Angenommen
3	$\sim p$	1, 2,MT
4	$\sim q \supset \sim p$	2, 3, KB

1	$\sim q \supset \sim p$ $/\therefore$ $p \supset q$	
2	p	Angenommen
3	$\sim \sim p$	2, DN
4	$\sim \sim q$	1, 4, MT
5	q	4, DN
6	$p \supset q$	2, 5, KR

16. Impl: $(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$

1	$p \supset q$ $/\therefore$ $\sim p \vee q$	
2	$\sim (\sim p \vee q)$	Angenommen
3	$\sim\sim p \,.\, \sim q$	2, De Morgan
4	$\sim \sim p$	3, Simp
5	p	4, DN
6	q	1, 5, MP
7	$\sim q$	3, Simp
8	$q \,.\, \sim q$	6, 7, Konj
9	$\sim \sim (\sim p \vee q)$	2, 8, RAA
10	$\sim p \vee q$	9, DN

1	$\sim p \vee q$ $/\therefore$ $p \supset q$	
2	p	Angenommen
3	$\sim \sim p$	2, DN
4	q	1, 3, DS
5	$p \supset q$	2, 4, KB

17. Äquiv: (2. Theorem): $(p \equiv q) \equiv ((p . q) \vee (\sim p . \sim q))$

1	$p \equiv q \;/\!\therefore\; ((p . q) \vee (\sim p . \sim q))$	
2	$(p \supset q) . (q \supset p)$	1, Äquiv
3	$p \supset q$	2, Simpl
4	$q \supset p$	2, Simpl
5	$\sim ((p . q) \vee (\sim p . \sim q))$	Angenommen
6	$\sim (p . q) . \sim (\sim p . \sim q)$	5, De Morgan
7	p	Angenommen
8	q	2, 7, MP
9	$p . q$	7, 8, Konj
10	$\sim (p . q)$	6, Simpl
11	$p . q . \sim (p . q)$	9, 10, Konj
12	$\sim p$	7, 11, RAA
13	$\sim q$	4, 13, MT
14	$\sim p . \sim q$	12, 13, Konj
15	$\sim (\sim p . \sim q)$	6, Simpl
16	$(\sim p . \sim q) . \sim (\sim p . \sim q)$	14, 15, Konj
17	$\sim \sim ((p . q) \vee (\sim p . \sim q))$	RAA, 5, 16
18	$(p . q) \vee (\sim p . \sim q)$	

1	$((p . q) \vee (\sim p . \sim q)) \;/\!\therefore\; p \equiv q$	
2	$p . q$	Angenommen
3	p	2, Simpl
4	$p \vee \sim q$	3, Add
5	$\sim q \vee p$	4, Komm
6	$q \supset p$	5, Impl
7	q	2, Simpl
8	$q \vee \sim p$	7, Add
9	$\sim p \vee q$	8, Komm
10	$p \supset q$	9, Impl
11	$(p \supset q) . (q \supset p)$	6, 10, Konj
12	$p \equiv q$	11, Äquiv
13	$(p . q) \supset (p \equiv q)$	2, 12, KB
14	$\sim p . \sim q$	Angenommen
15	$\sim p$	14, Simpl
16	$\sim q$	14, Simpl
17	$\sim p \vee q$	15, Add
18	$p \supset q$	17, Impl
19	$\sim q \vee p$	16, Add
20	$q \supset p$	19, Impl
21	$(p \supset q) . (q \supset p)$	18, 20, Konj
22	$p \equiv q$	21, Äquiv
23	$(\sim p . \sim q) \supset (p \equiv q)$	14, 22, KB
24	$p \equiv q$	1, 13, 23, KD

18. Exp. $((p \,.\, q) \supset r) \equiv (p \supset (q \supset r))$

1	$(p \,.\, q) \supset r \;/\therefore\; p \supset (q \supset r)$	
2	p	Angenommen
3	q	Angenommen
4	$p \,.\, q$	2, 3, Konj
5	r	1, 4, MP
6	$q \supset r$	3, 5, KB
7	$p \supset (q \supset r)$	2, 6, KB

1	$p \supset (q \supset r) \;/\therefore\; (p \,.\, q) \supset r$	
2	$p \,.\, q$	Angenommen
3	p	2, Simp
4	q	2, Simp
5	$q \supset r$	1, 3, MP
6	r	4, 5, MP
7	$(p \,.\, q) \supset r$	2, 6, KB

19. Taut: $p \equiv (p \vee q)$ sowie: $p \equiv p \,.\, p$

1	$p \;/\therefore\; p \vee p$	
2	$p \vee p$	1, Add.

1	$p \vee p \;/\therefore\; p$	
2	$\sim p$	Angenommen
3	p	1, 2, DS
4	$p \,.\, \sim p$	2, 3, Konj
5	$\sim\sim p$	2, 4, RAA
6	p	5, DN

1	$p \;/\therefore\; p \,.\, p$	
2	$p \,.\, p$	1, Konj

1	$p \,.\, p \;/\therefore\; p$	
1	p	1, Simp