Einige wichtige aussagenlogischen Beweise und philosophische Ergebnisse aussagenlogischer Resultate

Paradox der materialen Implikation I

1. A /∴ ~A ⊃ B	
2. ~(~A ⊃ B)	Angenommen
3. ~(~~A ∨ B)	2, Impl.
4. ~(A ∨ B)	3, D.N.
5. ~A . ~B	4, De M.
6. ~A	5, Simpl.
7. A . ~A	1,6, Konj.
8. ~~(~A ⊃B)	2-7, RAA
9. ~A ⊃ B	8, D.N.

Paradox der materialen Implikation II

1. ~A /∴ A ⊃ B	
2. ~(A ⊃ B)	Angenommen
3. ~(~A ∨ B)	2, Impl.
4. ~~A . ~B	3, De M.
5. ~~A	4, Simpl.
6. A	5, D.N.
7. A . ~A	1,6, Konj.
8. ~~(A ⊃ B)	2-7, RAA
9. A ⊃ B	8. D.N.

Paradox der materialen Implikation III

1. A /∴ B ⊃ A	
2. ~ (B ⊃ A)	Angenommen
3. ~(~ B ∨ A)	2, Impl
4. ~ ~ (~ ~ B . ~ A)	3, De Morgan
5. ~ ~ B . ~ A	4, DN
6. ~ A	5, Simpl
7. A . ~ A	1, 6, Konj
8. ~ ~ (B ⊃ A)	2, 7, RAA
9. B ⊃ A	9, DN

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten

1. $\sim(A \vee \sim A)$	Angenommen
2. $\sim\sim(\sim A \,.\, \sim\sim A)$	1, De M.
3. $\sim A \,.\, \sim\sim A$	2, D.N.
4. $\sim A \,.\, A$	3, D.N.
5. $A \,.\, \sim A$	4, Komm.
6. $\sim\sim(A \vee \sim A)$	1,5, RAA
7. $A \vee \sim A$	6, D.N.

Aus einem Widerspruch folgt alles

1. $A \,.\, \sim A \therefore B$	
2. $\sim A$	1, Simpl.
3. $A \supset B$	2, AI (siehe oben)
4. A	1, Simpl.
5. B	3,4, M.P.

- Die Paradoxien der materialen Implikation sind nicht widersprüchlich. Sie erwecken nur manchmal auf intuitiver Ebene Anstoss.
- Aus einem Widerspruch folgt alles: $A \,.\, \sim A \therefore B$. Somit impliziert eine widersprüchliche Theorie jeden Satz und dessen Negation. Eine solche Theorie ist uninformativ: So folgt aus ihr etwa, dass morgen schönes Wetter ist und dass morgen nicht schönes Wetter ist. Sie hilft uns nicht, zu wissen, was für Wetter wir morgen haben werden. Da die Theorie für morgen jedes mögliche Wetter voraussagt, ist sie auch nicht widerlegbar. Welches Wetter wir auch immer haben werden, sie impliziert einen Satz, der genau dieses Wetter für morgen voraussagt.
- Folgt aus einer Menge von Sätzen ein Satz B, und ist B falsch, so ist mindestens eine der Prämissen falsch:
  Gilt: $E_1 \,.\, \ldots \,.\, E_n \therefore B$ und $\sim B$, so gilt $\sim(E_1 \,.\, \ldots \,.\, E_n)$ und damit: $\sim E_1 \vee \ldots \vee \sim E_n$. Welche Prämisse falsch ist, wird durch die Widerlegung von B nicht festgelegt. Theorien sind Mengen von Sätzen $A_1, \ldots A_k,$ aus denen ein Beobachtungssätze C folgt, sofern andere Beobachtungssätze $D_1, \ldots, D_n$ als Zusatzprämissen festgelegt werden. Ist C falsch, ist einer der Sätze $A_1, \ldots A_k$ $D_1, \ldots, D_n$ falsch. Welcher dieser Sätze falsch ist, ist damit nicht bestimmt. Wir können an unserer Beobachtung zweifeln (d.h. einen der Sätze $D_1, \ldots, D_n$ verwerfen) oder wir können mindestens eines der Gesetze der Theorie verwerfen ($A_1, \ldots A_k$). Dieses Ergebnis beinhaltet, dass die Sätze von Theorien nicht einzeln empirisch überprüft werden können. Zudem erweist sich, dass es im Allgemeinen nicht sinnvoll ist, eine Theorie insgesamt zu verwerfen, sobald sie eine falsche Voraussage impliziert. Solange sich eine Theorie als nützlich erweist, werden wir versuchen, sie zu retten, indem wir unsere Beobachtungen in Frage stellen oder indem wir die Theorie möglichst minimal modifizieren: durch Umformulierungen bestimmter Gesetze machen wir sie mit unseren Beobachtungen kompatibel.

- Aus zwei unterschiedlichen Mengen von Prämissen kann dieselbe Konklusion B folgen:
  z.B. $p \supset q, p \therefore q$
  $p \vee q, \sim p \therefore q.$
  In diesem Beispiel widersprechen sich sogar einzelne Prämissen. Dies zeigt,
  (1) dass man aus der Konklusion nicht auf die Prämissen schliessen darf. Wenn zwei Personen a und b eine Position B vertreten, kann man nicht daraus schliessen, dass sie dafür die gleichen Gründe haben (In der Politik wird dieser Fehlschluss häufig begangen!).
  (2) Will ein Politiker den Leuten den Glauben an q beibringen und geht er davon aus, dass er Ihnen "$p \vee q$" oder "$\sim p$" nicht beibringen kann, obwohl er diese für richtig hält, und geht er davon aus, dass er ihnen "$p \supset q$" und "p" beibringen kann, kann er diese behaupten, um das gewünschte Resultat zu erhalten (Er lügt dabei nicht in allen Punkten!).
  (3) Auf Theorien angewendet bedeutet dies: Folgt ein Beobachtungssatz C aus $A_1, ..., A_k$ $D_1, ..., D_n$, so kann daraus nicht geschlossen werden, dass die Theorie $A_1, ..., A_k$ die einzig mögliche Theorie darstellt, um C zu erklären (Unterbestimmtheit der Theorien durch die Beobachtung!).