Boolsche Algebra, Zermelo-Fraenkel-System und Satzlogik

Eine Boolsche Algebra ist eine mathematische Struktur. Eine mathematische Struktur ist ein geordnetes n-Tuppel, das aus den folgenden Gliedern in der angegebenen Reihenfolge besteht: Wertebereich der Variablen U, k Individuen aus U, jeweils 0 ... m i-stellige Operationen. Für die aufgezählten Gegenstände der Struktur muss angegeben werden, welche Bedingungen sie erfüllen.

Z ist eine Boolsche Algebra genau dann, wenn $Z = \langle U, 0, 1, ^{c}, \sqcup, \sqcap \rangle$ und
für alle $x,y,z \in U$ gilt:

(1)	$x \sqcup y = y \sqcup x$ $x \sqcap y = y \sqcap x$	Kommutativgesetze
(2)	$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$	Assoziativgesetze
(3)	$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$ $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	Distributivgesetze
(4)	$x \sqcup (x \sqcap y) = x$ $x \sqcap (x \sqcup y) = x$	Verschmelzungsgesetze
(5)	$0 \sqcap x = 0$	Neutrales Element bzgl. "$\sqcap$"
(6)	$1 \sqcup x = l$	
(7)	$x \sqcap x^{c} = 0$	
(8)	$x \sqcup x^{c} = l$	

Lassen wir x, y, z über Mengen laufen und interpretieren wir "$\sqcup$" als "$\cup$", "$\sqcap$" als "$\cap$" und "0" als "$\emptyset$" so gelten im Fraenkel-Zermelo-System der Mengenlehre (1) - (5). Von (6) - (8) gelten nur die folgenden abgeschwächten Theoreme:

(6') $B \subseteq A \rightarrow (A \cup B = A)$

(7') $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ ("\" = Differenzmengenoperator)

(8') $B \subseteq A \rightarrow B \cup (A \setminus B) = A$

Wir können deshalb für beliebig viele Teilbereiche der Mengenlehre die Struktur einer Boolschen Algebra erhalten, indem wir den Wertebereich der Variablen entsprechend einschränken. Wir wählen eine beliebige Menge A und legen als Wertebereich der Variablen die Potenzmenge von A fest. Wir interpretieren "1" mit "A" und "B^{c}" als die Differenzmenge von A und B. Wie man sich leicht überzeugen kann, gelten jetzt (6)-(8).

Bei den Beweisen der Kommutativgesetze, der Assoziativgesetze, der Distributivgesetze und der Verschmelzungsgesetze der Mengenlehre spielen die entsprechenden Gesetze der Satzlogik eine entscheidende Rolle. Es stellt sich die Frage, ob die Satzlogik die Struktur einer Boolschen Algebra aufweist. In der Satzlogik gelten:

(l*) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

(2*) $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$

(3*) $(r \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ $(r \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

(4*) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$ $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$

(5*) $((p \wedge \neg p) \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$

(6*) $(\neg(p \wedge \neg p) \vee q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg p)$

(7*) $(q \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$

(8*) $(q \vee \neg q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg p)$

Die Satzbuchstaben haben wir nicht als Variablen betrachtet. Wir ordnen der Sprache der Aussagenlogik entsprechend keinen Wertebereich der Variablen zu. Zudem können wir das Identitätszeichen nur zwischen Namen von Gegenständen und bei quantifizierten Sätzen zwischen Variablen setzen. Zwischen Sätze setzen wir hingegen das Bikonditionalzeichen. Aus (1) - (8) kann man jedoch durch einige Umwandlungen (l*) – (8)* erzeugen: In (1) - (8) ersetzen wir das Identitätszeichen durch das Bikonditional. Für 1 setzen wir das Theorem "$\neg(p \wedge \neg p)$", für 0 den Widerspruch "$p \wedge \neg p$". "$\sqcap$" ersetzen wir durch "$\wedge$", "$\sqcup$" durch "$\vee$" und die Komplementbildung "^{c}" durch "$\neg$".

Damit ergibt sich eine enge Verwandschaft zwischen der Satzlogik und der Struktur einer Boolschen Algebra.

Übungen

1) Beweisen Sie (6') - (8')

2) Beweisen Sie (5*) - (8*)