Detaillierter Beweis eines Grenzwertsatzes

Wie der folgende Beweis zeigt, setzt ein genaues Verständnis der Ableitung des Grenzwertsatzes "$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$" Kenntnisse in Prädikatenlogik voraus. Im Folgenden werden einige arithmetische Theoreme (=T_A) ohne Beweis vorausgesetzt, um die logischen Aspekte des Beweises klarer hervortreten zu lassen.

Definition 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \leftrightarrow (k)(k > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to |f(z) - a| < k))$

Theorem 1: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

Laut Definition 1 gilt: (1) - (3) (Durch Einsetzen in die Definition):

	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \leftrightarrow$ $(k)(k > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x))\rvert < k))$		(1)
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leftrightarrow (k)(k > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\rvert < k))$		(2)
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \leftrightarrow (k)(k > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)\rvert < k))$		(3)
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	T	(4)
	$(k)(k > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\rvert < k))$	$\leftrightarrow$MPP	(5)2,4,
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$	T	(6)
	$(k)(k > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)\rvert < k))$	$\leftrightarrow$MPP	(7)3,6,

Wir nehmen folgenden Satz an und leiten daraus einen Widerspruch her:

1	$(\exists k)(k > 0 \wedge \neg(\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x))\rvert < k))$	A	(8)
2	$k' > 0 \wedge \neg(\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x))\rvert < k')$	A(TD)8	(9)8
	$k' > 0 \to \frac{k'}{2} > 0$	T_A	(10)
2	$k' > 0$	$\wedge$E	(11)9
2	$\frac{k'}{2} > 0$	MPP	(12)10,11
	$\frac{k'}{2} > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\rvert < \frac{k'}{2}$	UE	(13)5
2	$(\exists x')(z)(z > x' \to \lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\rvert < \frac{k'}{2}$	MPP	(14)12,13
	$\frac{k'}{2} > 0 \to (\exists x')(z)(z > x' \to \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)\rvert < \frac{k'}{2}$	UE	(15)7
2	$(\exists x')(z)(z > x' \to \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)\rvert < \frac{k'}{2}$	MPP	(16)12,15
3	$(z)(z > x_1 \to \lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\rvert < \frac{k'}{2})$	A(TD)14	(17)14
4	$(z)(z > x_2 \to \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)\rvert < \frac{k'}{2})$	A(TD)16	(18)16

	$x_0 = \max(x_1, x_2))$	Def.	(19)
	$x_0 = \max(x_1, x_2)) \rightarrow (x_0 \geq x_1 \wedge x_0 \geq x_2)$	T_A	(20)
	$x_0 \geq x_1 \wedge x_0 \geq x_2$	MPP	(21)19,20
	$x_0 \geq x_1$	$\wedge$E	(22)21
	$x_0 \geq x_2$	$\wedge$E	(23)21
5	$z > x_0$	A	(24)
	$(z > x_0 \wedge x_0 \geq x_1) \rightarrow z > x_1$	T_A	(25)
5	$z > x_0 \wedge x_0 \geq x_1$	$\wedge$I	(26)22,24
5	$z > x_1$	MPP	(27)25,26
3	$z > x_1 \rightarrow \lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \rvert < \frac{k'}{2}$	UE	(28)17
3,5	$\lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \rvert < \frac{k'}{2}$	MPP	(29)27,28
	$(z > x_0 \wedge x_0 \geq x_2) \rightarrow z > x_2$	T_A	(30)
5	$z > x_0 \wedge x_0 \geq x_2$	$\wedge$I	(31)23,24
5	$z > x_2$	MPP	(32)30,31
4	$z > x_2 \rightarrow \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \rvert < \frac{k'}{2}$	UE	(33)18
4,5	$\lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \rvert < \frac{k'}{2}$	MPP	(34)32,33
	$(x < k/2 \wedge y < k/2) \rightarrow x + y < k$	T_A	(35)
3,4,5	$\lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \rvert < \frac{k'}{2} \wedge \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \rvert < \frac{k'}{2}$	$\wedge$I	(36)29,34
3,4,5	$\lvert f(z) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \rvert + \lvert g(z) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \rvert < k'$	MPP(S)	(37)35,36
	$(\lvert a - b \rvert + \lvert c - d \rvert < k) \rightarrow (\lvert a + c - (b + d) \rvert < k)$	T_A	(38)
3,4,5	$\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'$	MPP(S)	(39)37,38
3,4	$z > x_0 \rightarrow (\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k')$	KR	(40)24,39
3,4	$(z)(z > x_0 \rightarrow (\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'))$	UI	(41)40
3,4	$(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow (\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'))$	EI	(42)41
3,2	$(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow (\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'))$	EE	(43)14,17,42
2	$(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow (\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'))$	EE	(44)16,18,43
2	$\neg(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'))$	$\wedge$E	(45)9
2	$(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow (\lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k')) \wedge$ $\neg(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k'))$	$\wedge$I	(46)44,45
2	$p \wedge \neg p$	AI	(47)46
1	$p \wedge \neg p$	EE	(48)8,9,47
	$\neg (\exists k)(k > 0 \wedge \neg(\exists x')(z)(z > x' \rightarrow \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k))$	RAA	(49)8,48
	$(k)(k > 0 \rightarrow (\exists x')(z)(z > x' \rightarrow \lvert f(z) + g(z) - (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)) \rvert < k))$	AI	(50)49
	$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x).$	$\leftrightarrow$MPP	(51)1,50
		q.e.d.	