# Zusammenfassung Modalsatzlogik

## Syntax des Systems K

$A$ ist eine Variable über Satzschemata des Systems $K$.

### 1) Vokabular

- Vokabular der Aussagenlogik
- Einstellige Operatoren: $L$

### 2) Bildungsregeln

- Bildungsregeln der Aussagenlogik
- Wenn $A$ eine wff ist, dann ist $LA$ eine wff.

### 3) Definitionen

$MA :=\sim L \sim A$

($LA$ wird gelesen als: "Es ist notwendig dass $A$". $MA$ wird gelesen als "Es ist möglich dass $A$".)

### 4) Regeln und Axiome

- Regeln der Aussagenlogik
- Axiom: $L(A \supset B) \supset (LA \supset LB)$
- Regel: Wenn $A$ ein Theorem von $K$ ist, dann ist $LA$ ein Theorem von $K$.

## Syntax des Systems KT

A ist eine Variable über wffs von KT. Sonst wie $K$, ausser 4) wird erweitert durch:
Axiom: $LA \supset A$

## Syntax des Systems KT4

A ist eine Variable über wffs von KT4. Sonst wie KT, ausser 4) wird erweitert durch
Axiom: $LA \supset LLA$

## Syntax des Systems KT5

A ist eine Variable über wffs von KT5. Sonst wie KT4, ausser 4) wird erweitert durch
Axiom: $MA \supset LMA$

**Semantik der Systeme K, KT, K4 und K5**

Allgmein besteht ein Modell aus:

(1) einer Aufzählung von möglichen Welten. Diese Aufzählung muss nicht alle möglichen Welten enthalten. Bei zwei Satzbuchstaben gibt es vier mögliche Welten, bei 3 Satzbuchstaben 8, usw. (es gibt $2^n$ mögliche Welten; $n =$ die Anzahl der Satzbuchstaben).

(2) für jede mögliche Welt von $B$ eine Aufzählung der atomaren Sätze, die in ihr wahr sind.

(3) Eine Liste $C$ der Welten, die zu jeder möglichen Welt von $B$ Alternativen (= alternative Welten) darstellen. Alternative Welten sind Welten, die von B her zugänglich sind. In ”$w_2$ ist eine Alternative zu $w_1$” ist der Ausdruck ”ist eine Aternative zu” ein zweistelliges Prädikat (das was durch das Prädikat festgelegt wird, ist eine Relation). Wir kürzen ”$w_2$ ist eine Alternative zu $w_1$” ab mit ”$Zw_1w_2$”

Im Speziellen gilt:

$X$ ist ein **K-Modell** genau dann, wenn man keine Angaben über die Zugänglichkeit von Welten machen kann.

$X$ ist ein **KT-Modell** genau dann, wenn
(i) für alle $w_i$ von $X$ gilt: $Zw_iw_i$
(d.h. jede Welt von $X$ ist eine Alternative zu sich selbst; Reflexivität).

$X$ ist ein **KT4-Modell** genau dann, wenn
(i) für alle $w_i$ von $X$ gilt: $Zw_iw_i$
(ii) für alle $w_i, w_j, w_h$ von $X$ gilt: Wenn $Zw_iw_j$ und $Zw_jw_h$, dann $Zw_iw_h$
(d.h. ist $w_2$ eine Alternative zu $w_1$ und ist $w_3$ eine Alternative zu $w_2$, dann ist $w_3$ eine Alternative zu $w_1$; Transitivität).

$X$ ist ein **KT5-Modell** (s. Schlussbemerkung S. 8) genau dann, wenn
(i) für alle $w_i$ von $X$ gilt: $Zw_iw_i$
(ii) für alle $w_i, w_j, w_h$ von $X$ gilt: Wenn $Zw_iw_j$ und $Zw_jw_h$, dann $Zw_iw_h$
(iii) für alle $w_i, w_j$ von $X$ gilt: Wenn $Zw_iw_j$, dann $Zw_jw_i$
(d.h. Wenn $w_2$ eine Alternative zu $w_1$ ist, dann ist $w_1$ eine Alternative zu $w_2$; Symmetrie).

**Definition KY-Modaltautologie:** Ein Schema ist eine KY-Modaltautologie genau dann, wenn es in jeder Welt eines jeden KY-Modells wahr ist (Y wird weggelassen oder steht für T, T4, T5).

Um auszumachen, ob ein Schema eine KY-Modaltautologie ist, verwenden wir eine Reductio ad absurdum-Methode. Wir nehmen an, ein Schema sei keine Tautologie. Es muss also ein Modell mit einer Welt geben, in der das Schema falsch ist. Stossen wir durch diese Annahme auf einen Widerspruch, schliessen wir daraus, dass es kein Modell mit einer Welt gibt, in der das Schema falsch ist. Somit ist das Schema in allen Welten aller Modelle wahr. Das Schema ist also eine Tautologie.

**Vorgehen:** Wir nehmen das Schema in einer Welt als falsch an und versuchen alle möglichen Konsequenzen daraus zu ziehen (Satzlogisch, modallogisch oder modelltheoretisch): Insbesondere gelten folgende modelltheoretischen Regeln:

**Regel 1:** Wenn ”$LA$” in $w_i$ falsch ist, dann gibt es eine Welt $w_j$ mit $Zw_iw_j$, so dass ”$A$” in $w_j$ falsch ist.

**Regel 2:** Wenn ”$MA$” in $w_i$ wahr ist, dann gibt es eine Welt $w_j$ mit $Zw_iw_j$, so dass ”A” in $w_j$ wahr ist.

**Regel 3:** Wenn ”$LA$” in $w_i$ wahr ist, dann gilt $A$ in allen $w_j$ mit $Zw_iw_j$.

**Regel 4:** Wenn ”$MA$” in $w_i$ falsch ist, dann ist $A$ in allen $w_j$ mit $Zw_iw_j$ falsch.

Man beachte: Die Regeln sind redundant und könnten reduziert werden. Nur bei der Regel 1 und 2 eröffnet man neue Welten (die Regeln machen ja Existenzausssagen). Da wir nicht wissen, in welcher Welt laut Regeln 1 und 2 eine Aussage wahr (oder falsch) ist, müssen wir jeweils eine neue Welt eröffnen (wir können nicht davon ausgehen, dass die entsprechenden Aussagen in einer spezifischen Welt gelten oder falsch sind).

Demgegenüber ermöglichen es die Regeln 3 und 4, in bereits eröffneten Welten entsprechende Nachführungen anbringen (Regeln 3 und 4 machen keine Existenzaussagen).

Für die syntaktischen Systeme K, KT, KT4 und KT5 gilt: in dieser Reihenfolge ist das folgende syntaktische System immer eine Erweiterung des vorangegangenen. Dies gilt offensichtlich auch für die Semantik (siehe Definitionen KX-Modelle). Ist ein Schema eine K-Tautologie, so ist es damit auch eine KT-, KT4- und eine KT5-Tautologie. Wollen wir wissen, in welchen Systemen ein Schema eine Tautologie ist, versuchen wir eine Reductio ad Absurdum für K. Gelingt es uns nicht, einen Widerspruch herzuleiten, führen wir die jeweiligen Zusatzbedingungen ein. Genügt etwa die Zusatzbedingung der Reflexivität, um einen Widerspruch herzuleiten, wissen wir, dass das Schema eine Tautologie ist in KT, KT4 und KT5.

### Beispiele

Wir wenden die Regeln zuerst auf die Axiome an, da diese jeweils erst in der entsprechenden Erweiterung tautologisch sein sollten.

1) $L(A \supset B) \supset (LA \supset LB)$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $L(A \supset B)$ | $LA \supset LB$ |
| $LA$ | $LB$ |

$\rightarrow$

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A \supset B$ | $B$ |
| $A$ | |
| $B$ | |

Da für $K$ keine spezifischen Relationseigenschaften für $Z$ gelten (Transitivität, Reflexivität oder Symmetrie), können wir hier z.B. nicht aus $LA$ in der Wahrspalte von $w_1$ auf $A$ in der Wahrspalte von $w_1$ schliessen. Da $LB$ falsch ist, gibt es laut Regel 1 eine Welt, in der $B$ falsch ist. Deshalb eröffnen wir eine entsprechende Welt $w_2$. Da $w_2$ eine Alternative zu $w_1$ ist (siehe Regel 1), so muss laut Regel 3 in $w_2$ $A \supset B$ und $A$ gelten. In $w_2$ erhalten wir $B$ in der Wahr- und in der Falschspalte. Die Annahme einer Welt, in der das Schema falsch ist, führt somit zu einem Widerspruch. Das Axiom ist eine K-Tautologie (und damit eine KT-, KT4- und KT5-Tautologie).

2) $LA \supset A$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LA$ | $A$ |
| $A$ | |

In $w_1$ dürfen wir nur von $LA$ auf $A$ schliessen, wenn wir die Reflexivität von $Z$ voraussetzen. Entsprechend ist das Axiom keine K-Tautologie, aber eine KT-Tautologie (und damit eine KT4- und eine KT5-Tautologie).

3) $LA \supset LLA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LA$ | $LLA$ |

→

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $LA$ |

→

| $w_3$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $A$ |

Auf $A$ in der Wahrheitsspalte von $w_3$ dürfen wir nur schliessen, wenn für $Z$ die Transitivität gilt. Somit gelingt der Beweis nur, wenn wir die Transitivität voraussetzen. Somit ist das Axiom eine K4-Tautologie, und damit eine K5-Tautologie (im obigen Beweis brauchen wir die Reflexitivät nicht).

4) $MA \supset LMA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $MA$ | $LMA$ |

→

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $A$ |

↓

| $w_3$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| | $MA$ |

Aus $MA$ in der Falschspalte von $w_3$ dürfen wir nur auf $A$ in der Falschspalte von $w_2$ schliessen, wenn die Symmetrie und die Transitivität von $Z$ erfüllt ist. Wegen der Symmetrie von $Z$ ist $w_1$ eine alternative Welt von $w_3$ (da $w_3$ eine alternative Welt von $w_1$ ist). Wegen der Transitivität ($w_2$ ist eine alternative Welt von $w_1$) ist dann $w_2$ eine alternative Welt von $w_3$. Deshalb ist dort $A$ falsch (Regel 4). ($A$ ist natürlich auch in $w_1$ falsch. Wir führen Sätze aber jeweils nur dann an, wenn dies beweistechnisch etwas bringt).

Damit haben wir die Korrespondenz der Semantik und der Axiome gezeigt. Es folgen noch ein paar Beispiele zwecks Übung.

5) $L(A \supset L(B \supset C)) \;\; \supset M(B \supset (LA \supset MC))$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $L(A \supset L(B \supset C))$ | $M(B \supset (LA \supset MC))$ |
| $A \supset L(B \supset C)$ | $B \supset (LA \supset MC)$ |
| $B$ | $LA \supset MC$ |
| $LA$ | $MC$ |
| $A$ | $C$ |
| $L(B \supset C)$ | |
| $B \supset C$ | |
| $C$ | |

Wir werden nicht dazu geführt, eine neue Welt zu eröffnen. Um den Beweis zu führen, müssen wir die Reflexivität hinzunehmen. Entsprechend ist das Schema eine KT-Tautologie (und KT4, KT5).

6) $L(A \supset M(B \supset C)) \;\; \supset M(B \supset (LA \supset MC))$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $L(A \supset M(B \supset C))$ | $M(B \supset (LA \supset MC))$ |
| $A \supset M(B \supset C)$ | $B \supset (LA \supset MC)$ |
| $B$ | $LA \supset MC$ |
| $LA$ | $MC$ |
| $A$ | $C$ |
| $M(B \supset C)$ | |

$\rightarrow$

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $B \supset C$ | $B \supset (LA \supset MC)$ |
| $B$ | $LA \supset MC$ |
| $LA$ | $MC$ |
| $C$ | $C$ |

Ohne die Reflexivität kann der Beweis nicht geführt werden. Weitere Eigenschaften brauchen wir nicht. Somit handelt es sich um eine KT-Tautologie. $M(B \supset C)$ führt uns dazu, einen neue Welt $w_2$ zu eröffnen. In dieser führen wir dann $B \supset (LA \supset MC)$ in der Falschspalte von $w_2$ nach, weil $M(B \supset (LA \supset MC))$ in der Falschspalte von $w_1$ vorkommt. Wir könnten in der Wahrspalte von $w_2$ auch $A \supset M(B \supset C)$ nachführen. Dies ist im vorliegenden Fall aber unnütz.

7) $MA \vee M \sim A$ (ist satzlogisch äquivalent mit $\sim MA \supset M \sim A$)

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $\sim MA$ | $M \sim A$ |
| $A$ | $A$ |

Wir müssen die Reflexivität von $Z$ verwenden. Somit handelt es sich um eine KT-Tautologie. Man beachte: Wenn $M \sim A$ falsch ist, dann ist $\sim M \sim A \equiv LA$ wahr. Damit können wir unter Annahme der Reflexivität in die Wahrspalte $A$ setzen. Wenn $\sim MA$ wahr ist, dann ist $\sim\sim MA \equiv MA$ falsch. Damit können wir - wiederum unter Annahme der Reflexivität - in die Falschspalte $A$ setzen.

8) $LA \supset (MB \supset M(A.B))$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LA$ | $MB \supset M(A.B)$ |
| $MB$ | $M(A.B)$ |

$\rightarrow$

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $B$ | $A.B$ |
| $A$ | |
| $A.B$ | |

Weil MB in $w_1$ in der Wahrspalte ist, wird die Welt $w_2$ eröffnet. In dieser können wir dann A nachführen, da in $w_1$ $LA$ in der Wahrspalte vorkommt. Ebenso gilt $A.B$ in jeder von $w_1$ zugänglichen Welt als falsch. Wir brauchen keine zusätzlichen Eigenschaften: K-Tautologie.

9) $MMA \supset MA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $MMA$ | $MA$ |

$\rightarrow$

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $MA$ | $A$ |

$\rightarrow$

| $w_3$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $A$ |

Wir brauchen die Transitivität, um in die Falschspalte von $w_3$ auf Grund der Regel 2 $A$ hinsetzen zu können. (KT4-Tautologie)

10) $L(\sim A \supset A) \supset LA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $L(\sim A \supset A)$ | $LA$ |

$\rightarrow$

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $\sim A \supset A$ | $A$ |
| $\sim A$ | |
| $A$ | |

Wenn $A$ falsch ist, ist $\sim A$ wahr. Damit folgt dann in der Wahrspalte aus $\sim A \supset A$ mit dem Modus Ponens $A$.

11) $(LA.LB) \supset (A \equiv B)$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LA.LB$ | $A \equiv B$ |
| $LA$ | |
| $LB$ | |
| $A$ | |
| $B$ | |
| $A.B$ | |
| $A \equiv B$ | |

Aus $A.B$ folgt satzlogisch $A \equiv B$. Wir verwenden die Reflexivität: KT-Tautologie.

12) $MLA \supset LA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $MLA$ | $LA$ |

→

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LA$ | |

↓

| $w_3$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $A$ |

Wir eröffnen $w_2$ wegen $MLA$ in der Wahrspalte von $w_1$. Wir eröffnen $w_3$ wegen LA in der Falschspalte von $w_1$. $A$ können wir in die Wahrspalte von $w_3$ (wegen $LA$ in der Wahrspalte von $w_2$ ) nur setzen, wenn die Symmetrie und die Transitivität gilt. KT5-Tautologie.

13) $LLA \supset (\sim MM \sim A)$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LLA$ | $\sim MM \sim A$ |
| | $L \sim M \sim A$ |
| | $LLA$ |

Man beachte: $\sim MA$ ist modallogisch äquivalent mit $L \sim A$ und $\sim M \sim A$ ist modallogisch äquivalent mit $LA$.

14) $MLMA \supset MA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $MLMA$ | $MA$ |

→

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $LMA$ | $A$ |
| $MA$ | |

→

| $w_3$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $A$ |

Wir verwenden die Reflexivität (um in $w_2$ von $LMA$ auf $MA$ zu gelangen) und die Transitivität, um in die Falschspalte von $w_3$ wegen $MA$ in der Falschspalte von $w_1$ $A$ hinsetzen zu können. Somit handelt es sich um eine KT4-Tautologie.

15) $MA \supset LMA$

| $w_1$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $MA$ | $LMA$ |

→

| $w_2$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| $A$ | $A$ |

↓

| $w_3$ | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| | $MA$ |

Wir brauchen, um wegen $MA$ in der Falschspalte von $w_3$ in die Falschspalte von $w_2$ $A$ hinsetzen zu können, die Symmetrie und die Transitivität.

**Schlussbemerkung**: Für KT5 wird im Skript auf der Seite 73 eine Eigenschaft geliefert, die korrekt wie folgt lauten müsste: Wenn $Zw_1w_2$ und $Zw_1w_3$, dann $Zw_2w_3$ und $Zw_3w_2$. Diese Eigenschaft ist mit der Symmetriebedingung nicht äquivalent, sie wird aber von der Symmetrie und der Transitivität impliziert. Ich folgte bei der Formulierung der Eigenschaften von KT5 den folgenden Autoren:

**Literatur**: G.E. Hughes, M.J. Cresswell, Einführung in die Modallogik, Berlin, de Gruyter, 1978