

Zusammenfassung Modalsatzlogik

Syntax des Systems K

A ist eine Variable über Satz schemata des Systems K .

1) Vokabular

- Vokabular der Aussagenlogik
- Einstellige Operatoren: L

2) Bildungsregeln

- Bildungsregeln der Aussagenlogik
- Wenn A eine wff ist, dann ist LA eine wff.

3) Definitionen

$MA := \sim L \sim A$

(LA wird gelesen als: "Es ist notwendig dass A ". MA wird gelesen als "Es ist möglich dass A ".)

4) Regeln und Axiome

- Regeln der Aussagenlogik
- Axiom: $L(A \supset B) \supset (LA \supset LB)$
- Regel: Wenn A ein Theorem von K ist, dann ist LA ein Theorem von K .

Syntax des Systems KT

A ist eine Variable über wffs von KT. Sonst wie K , ausser 4) wird erweitert durch:
Axiom: $LA \supset A$

Syntax des Systems KT4

A ist eine Variable über wffs von KT4. Sonst wie KT, ausser 4) wird erweitert durch
Axiom: $LA \supset LLA$

Syntax des Systems KT5

A ist eine Variable über wffs von KT5. Sonst wie KT4, ausser 4) wird erweitert durch
Axiom: $MA \supset LMA$

Semantik der Systeme K, KT, K4 und K5

Allgemein besteht ein Modell aus:

(1) einer Aufzählung von möglichen Welten. Diese Aufzählung muss nicht alle möglichen Welten enthalten. Bei zwei Satzbuchstaben gibt es vier mögliche Welten, bei 3 Satzbuchstaben 8, usw. (es gibt 2^n mögliche Welten; n = die Anzahl der Satzbuchstaben).

(2) für jede mögliche Welt von B eine Aufzählung der atomaren Sätze, die in ihr wahr sind.

(3) Eine Liste C der Welten, die zu jeder möglichen Welt von B Alternativen (= alternative Welten) darstellen. Alternative Welten sind Welten, die von B her zugänglich sind. In " w_2 ist eine Alternative zu w_1 " ist der Ausdruck "ist eine Alternative zu" ein zweistelliges Prädikat (das was durch das Prädikat festgelegt wird, ist eine Relation). Wir kürzen " w_2 ist eine Alternative zu w_1 " ab mit " $Z_{w_1 w_2}$ "

Im Speziellen gilt:

X ist ein **K-Modell** genau dann, wenn man keine Angaben über die Zugänglichkeit von Welten machen kann.

X ist ein **KT-Modell** genau dann, wenn

(i) für alle w_i von X gilt: $Z_{w_i w_i}$

(d.h. jede Welt von X ist eine Alternative zu sich selbst; Reflexivität).

X ist ein **KT4-Modell** genau dann, wenn

(i) für alle w_i von X gilt: $Z_{w_i w_i}$

(ii) für alle w_i, w_j, w_h von X gilt: Wenn $Z_{w_i w_j}$ und $Z_{w_j w_h}$, dann $Z_{w_i w_h}$

(d.h. ist w_2 eine Alternative zu w_1 und ist w_3 eine Alternative zu w_2 , dann ist w_3 eine Alternative zu w_1 ; Transitivität).

X ist ein **KT5-Modell** (s. Schlussbemerkung S. 8) genau dann, wenn

(i) für alle w_i von X gilt: $Z_{w_i w_i}$

(ii) für alle w_i, w_j, w_h von X gilt: Wenn $Z_{w_i w_j}$ und $Z_{w_j w_h}$, dann $Z_{w_i w_h}$

(iii) für alle w_i, w_j von X gilt: Wenn $Z_{w_i w_j}$, dann $Z_{w_j w_i}$

(d.h. Wenn w_2 eine Alternative zu w_1 ist, dann ist w_1 eine Alternative zu w_2 ; Symmetrie).

Definition KY-Modaltautologie: Ein Schema ist eine KY-Modaltautologie genau dann, wenn es in jeder Welt eines jeden KY-Modells wahr ist (Y wird weggelassen oder steht für T, T4, T5).

Um auszumachen, ob ein Schema eine KY-Modaltautologie ist, verwenden wir eine Reductio ad absurdum-Methode. Wir nehmen an, ein Schema sei keine Tautologie. Es muss also ein Modell mit einer Welt geben, in der das Schema falsch ist. Stossen wir durch diese Annahme auf einen Widerspruch, schliessen wir daraus, dass es kein Modell mit einer Welt gibt, in der das Schema falsch ist. Somit ist das Schema in allen Welten aller Modelle wahr. Das Schema ist also eine Tautologie.

Vorgehen: Wir nehmen das Schema in einer Welt als falsch an und versuchen alle möglichen Konsequenzen daraus zu ziehen (Satzlogisch, modallogisch oder

modelltheoretisch): Insbesondere gelten folgende modelltheoretischen Regeln:

Regel 1: Wenn "LA" in w_i falsch ist, dann gibt es eine Welt w_j mit Zw_iw_j , so dass "A" in w_j falsch ist.

Regel 2: Wenn "MA" in w_i wahr ist, dann gibt es eine Welt w_j mit Zw_iw_j , so dass "A" in w_j wahr ist.

Regel 3: Wenn "LA" in w_i wahr ist, dann gilt A in allen w_j mit Zw_iw_j .

Regel 4: Wenn "MA" in w_i falsch ist, dann ist A in allen w_j mit Zw_iw_j falsch.

Man beachte: Die Regeln sind redundant und könnten reduziert werden. Nur bei der Regel 1 und 2 eröffnet man neue Welten (die Regeln machen ja Existenzaussagen). Da wir nicht wissen, in welcher Welt laut Regeln 1 und 2 eine Aussage wahr (oder falsch) ist, müssen wir jeweils eine neue Welt eröffnen (wir können nicht davon ausgehen, dass die entsprechenden Aussagen in einer spezifischen Welt gelten oder falsch sind).

Demgegenüber ermöglichen es die Regeln 3 und 4, in bereits eröffneten Welten entsprechende Nachführungen anbringen (Regeln 3 und 4 machen keine Existenzaussagen).

Für die syntaktischen Systeme K, KT, KT4 und KT5 gilt: in dieser Reihenfolge ist das folgende syntaktische System immer eine Erweiterung des vorangegangenen. Dies gilt offensichtlich auch für die Semantik (siehe Definitionen KX-Modelle). Ist ein Schema eine K-Tautologie, so ist es damit auch eine KT-, KT4- und eine KT5-Tautologie. Wollen wir wissen, in welchen Systemen ein Schema eine Tautologie ist, versuchen wir eine Reductio ad Absurdum für K. Gelingt es uns nicht, einen Widerspruch herzuleiten, führen wir die jeweiligen Zusatzbedingungen ein. Genügt etwa die Zusatzbedingung der Reflexivität, um einen Widerspruch herzuleiten, wissen wir, dass das Schema eine Tautologie ist in KT, KT4 und KT5.

Beispiele

Wir wenden die Regeln zuerst auf die Axiome an, da diese jeweils erst in der entsprechenden Erweiterung tautologisch sein sollten.

$$1) L(A \supset B) \supset (LA \supset LB)$$

w_1	
wahr	falsch
$L(A \supset B)$	$LA \supset LB$
LA	LB

→

w_2	
wahr	falsch
$A \supset B$	B
A	
B	

Da für K keine spezifischen Relationseigenschaften für Z gelten (Transitivität, Reflexivität oder Symmetrie), können wir hier z.B. nicht aus LA in der Wahrspalte von w_1 auf A in der Wahrspalte von w_1 schließen. Da LB falsch ist, gibt es laut Regel 1 eine Welt, in der B falsch ist. Deshalb eröffnen wir eine entsprechende Welt w_2 . Da w_2 eine Alternative zu w_1 ist (siehe Regel 1), so muss laut Regel 3 in w_2 $A \supset B$ und A gelten. In w_2 erhalten wir B in der Wahr- und in der Falschspalte. Die Annahme einer Welt, in der

das Schema falsch ist, führt somit zu einem Widerspruch. Das Axiom ist eine K-Tautologie (und damit eine KT-, KT4- und KT5-Tautologie).

2) $LA \supset A$

w_1	
wahr	falsch
LA	A
A	

In w_1 dürfen wir nur von LA auf A schliessen, wenn wir die Reflexivität von Z voraussetzen. Entsprechend ist das Axiom keine K-Tautologie, aber eine KT-Tautologie (und damit eine KT4- und eine KT5-Tautologie).

3) $LA \supset LLA$

w_1		→	w_2		→	w_3	
wahr	falsch		wahr	falsch		wahr	falsch
LA	LLA		A	LA		A	A

Auf A in der Wahrheitsspalte von w_3 dürfen wir nur schliessen, wenn für Z die Transitivität gilt. Somit gelingt der Beweis nur, wenn wir die Transitivität voraussetzen. Somit ist das Axiom eine K4-Tautologie, und damit eine K5-Tautologie (im obigen Beweis brauchen wir die Reflexivität nicht).

4) $MA \supset LMA$

w_1		→	w_2	
wahr	falsch		wahr	falsch
MA	LMA		A	A

↓

w_3	
wahr	falsch
	MA

Aus MA in der Falschspalte von w_3 dürfen wir nur auf A in der Falschspalte von w_2 schliessen, wenn die Symmetrie und die Transitivität von Z erfüllt ist. Wegen der Symmetrie von Z ist w_1 eine alternative Welt von w_3 (da w_3 eine alternative Welt von w_1 ist). Wegen der Transitivität (w_2 ist eine alternative Welt von w_1) ist dann w_2 eine alternative Welt von w_3 . Deshalb ist dort A falsch (Regel 4). (A ist natürlich auch in w_1 falsch. Wir führen Sätze aber jeweils nur dann an, wenn dies beweistechnisch etwas bringt).

Damit haben wir die Korrespondenz der Semantik und der Axiome gezeigt. Es folgen noch ein paar Beispiele zwecks Übung.

$$5) L(A \supset L(B \supset C)) \supset M(B \supset (LA \supset MC))$$

w_1	
wahr	falsch
$L(A \supset L(B \supset C))$	$M(B \supset (LA \supset MC))$
$A \supset L(B \supset C)$	$B \supset (LA \supset MC)$
B	$LA \supset MC$
LA	MC
A	C
$L(B \supset C)$	
$B \supset C$	
C	

Wir werden nicht dazu geführt, eine neue Welt zu eröffnen. Um den Beweis zu führen, müssen wir die Reflexivität hinzunehmen. Entsprechend ist das Schema eine KT-Tautologie (und KT4, KT5).

$$6) L(A \supset M(B \supset C)) \supset M(B \supset (LA \supset MC))$$

w_1	
wahr	falsch
$L(A \supset M(B \supset C))$	$M(B \supset (LA \supset MC))$
$A \supset M(B \supset C)$	$B \supset (LA \supset MC)$
B	$LA \supset MC$
LA	MC
A	C
$M(B \supset C)$	

→

w_2	
wahr	falsch
$B \supset C$	$B \supset (LA \supset MC)$
B	$LA \supset MC$
LA	MC
C	C

Ohne die Reflexivität kann der Beweis nicht geführt werden. Weitere Eigenschaften brauchen wir nicht. Somit handelt es sich um eine KT-Tautologie. $M(B \supset C)$ führt uns dazu, einen neue Welt w_2 zu eröffnen. In dieser führen wir dann $B \supset (LA \supset MC)$ in der Falschspalte von w_2 nach, weil $M(B \supset (LA \supset MC))$ in der Falschspalte von w_1 vorkommt. Wir könnten in der Wahrspalte von w_2 auch $A \supset M(B \supset C)$ nachführen. Dies ist im vorliegenden Fall aber unnütz.

7) $MA \vee M \sim A$ (ist satzlogisch äquivalent mit $\sim MA \supset M \sim A$)

w_1	
wahr	falsch
$\sim MA$	$M \sim A$
A	A

Wir müssen die Reflexivität von Z verwenden. Somit handelt es sich um eine KT-Tautologie. Man beachte: Wenn $M \sim A$ falsch ist, dann ist $\sim M \sim A \equiv LA$ wahr. Damit können wir unter Annahme der Reflexivität in die Wahrspalte A setzen. Wenn $\sim MA$ wahr ist, dann ist $\sim \sim MA \equiv MA$ falsch. Damit können wir - wiederum unter Annahme der Reflexivität - in die Falschspalte A setzen.

8) $LA \supset (MB \supset M(A.B))$

w_1		→	w_2	
wahr	falsch		wahr	falsch
LA	$MB \supset M(A.B)$		B	$A.B$
MB	$M(A.B)$		A	
			$A.B$	

Weil MB in w_1 in der Wahrspalte ist, wird die Welt w_2 eröffnet. In dieser können wir dann A nachführen, da in w_1 LA in der Wahrspalte vorkommt. Ebenso gilt $A.B$ in jeder von w_1 zugänglichen Welt als falsch. Wir brauchen keine zusätzlichen Eigenschaften: K-Tautologie.

9) $MMA \supset MA$

w_1		→	w_2		→	w_3	
wahr	falsch		wahr	falsch		wahr	falsch
MMA	MA		MA	A		A	A

Wir brauchen die Transitivität, um in die Falschspalte von w_3 auf Grund der Regel 2 A hinsetzen zu können. (KT4-Tautologie)

10) $L(\sim A \supset A) \supset LA$

w_1		→	w_2	
wahr	falsch		wahr	falsch
$L(\sim A \supset A)$	LA		$\sim A \supset A$	A
			$\sim A$	
			A	

Wenn A falsch ist, ist $\sim A$ wahr. Damit folgt dann in der Wahrspalte aus $\sim A \supset A$ mit dem Modus Ponens A .

11) $(LA.LB) \supset (A \equiv B)$

w_1	
wahr	falsch
$LA.LB$	$A \equiv B$
LA	
LB	
A	
B	
$A.B$	
$A \equiv B$	

Aus $A.B$ folgt satzlogisch $A \equiv B$. Wir verwenden die Reflexivität: KT-Tautologie.

12) $MLA \supset LA$

w_1		→	w_2	
wahr	falsch		wahr	falsch
MLA	LA		LA	

↓

w_3	
wahr	falsch
A	A

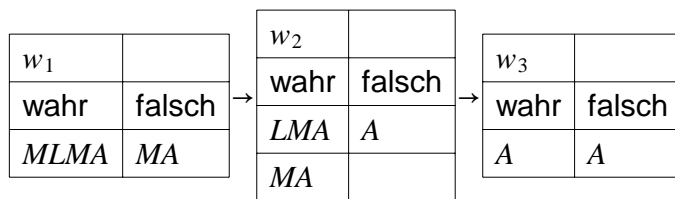
Wir eröffnen w_2 wegen MLA in der Wahrspalte von w_1 . Wir eröffnen w_3 wegen LA in der Falschspalte von w_1 . A können wir in die Wahrspalte von w_3 (wegen LA in der Wahrspalte von w_2) nur setzen, wenn die Symmetrie und die Transitivität gilt. KT5-Tautologie.

13) $LLA \supset (\sim MM \sim A)$

w_1	
wahr	falsch
LLA	$\sim MM \sim A$
	$L \sim M \sim A$
	LLA

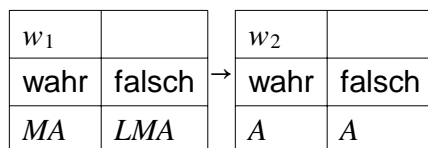
Man beachte: $\sim MA$ ist modallogisch äquivalent mit $L \sim A$ und $\sim M \sim A$ ist modallogisch äquivalent mit LA .

14) $MLMA \supset MA$

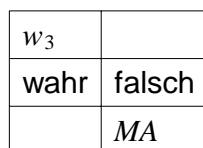


Wir verwenden die Reflexivität (um in w_2 von LMA auf MA zu gelangen) und die Transitivität, um in die Falschspalte von w_3 wegen MA in der Falschspalte von w_1 A hinsetzen zu können. Somit handelt es sich um eine KT4-Tautologie.

15) $MA \supset LMA$



↓



Wir brauchen, um wegen MA in der Falschspalte von w_3 in die Falschspalte von w_2 A hinsetzen zu können, die Symmetrie und die Transitivität.

Schlussbemerkung: Für KT5 wird im Skript auf der Seite 73 eine Eigenschaft geliefert, die korrekt wie folgt lauten müsste: Wenn Zw_1w_2 und Zw_1w_3 , dann Zw_2w_3 und Zw_3w_2 . Diese Eigenschaft ist mit der Symmetriebedingung nicht äquivalent, sie wird aber von der Symmetrie und der Transitivität impliziert. Ich folgte bei der Formulierung der Eigenschaften von KT5 den folgenden Autoren:

Literatur: G.E. Hughes, M.J. Cresswell, Einführung in die Modallogik, Berlin, de Gruyter, 1978